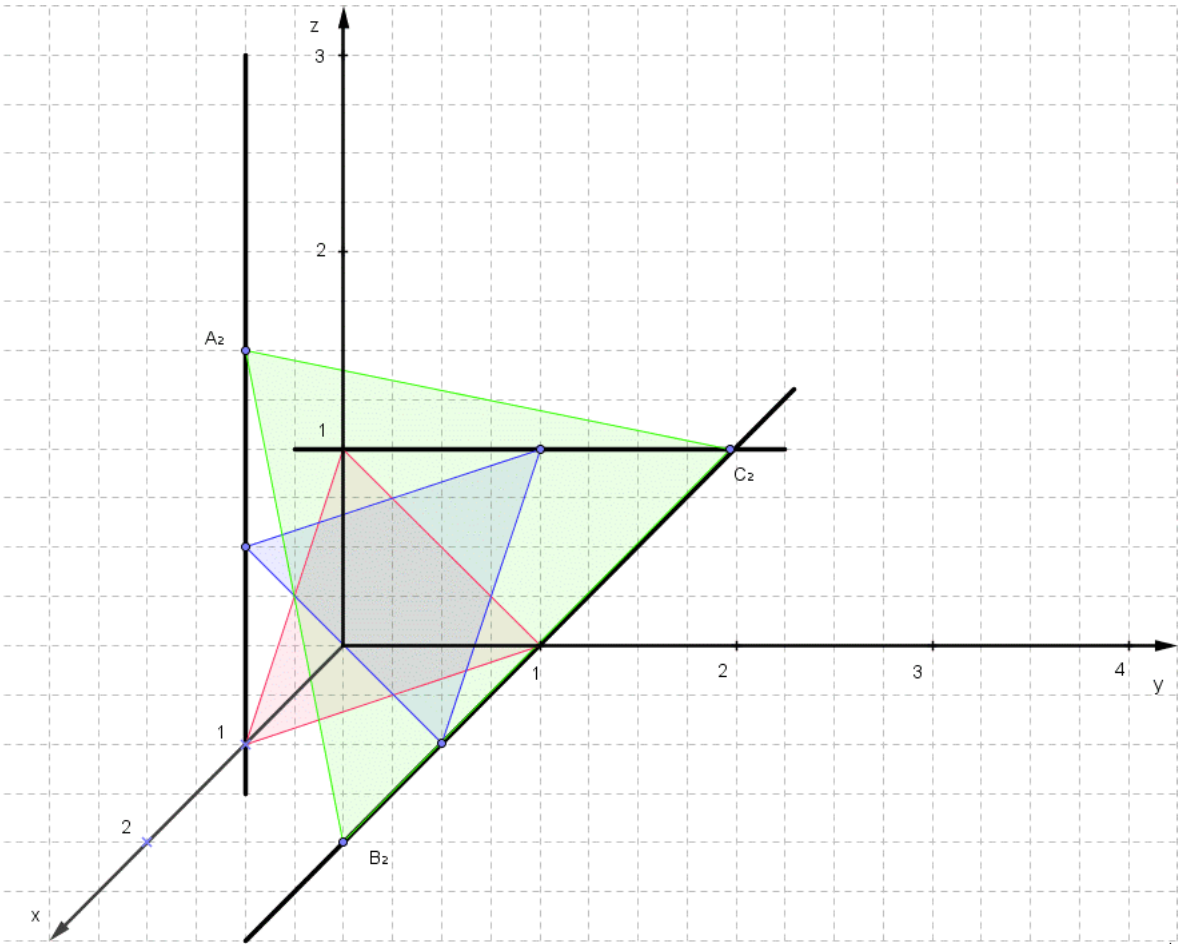
## Lösung zu Teilaufgabe 1.1 ( 4 BE)

Der Punkt $A_t$ bewegt sich entlang der Geraden $g_a : \overrightarrow{a_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

der Punkt $B_t$ bewegt sich entlang der Geraden $g_b : \overrightarrow{b_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

der Punkt $C_t$ bewegt sich entlang der Geraden $g_c : \overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Die Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ bilden für alle reellen Zahlen t ein Dreieck $\Delta_t$. In Aufgabe 1.1 sollen zunächst die drei Geraden sowie die drei Dreiecke $\Delta_0$, $\Delta_1$ und $\Delta_2$ in ein vorgegebenes Koordinatensystem gezeichnet werden. Siehe Skizze :



**Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (3 BE)**

Um zu zeigen, dass die Dreiecke $\Delta_t$ für jedes reelle t gleichseitig sind, müssen die Länge der Vektoren $\overrightarrow{A_tB_t}$ , $\overrightarrow{A_tC_t}$ und $\overrightarrow{B_tC_t}$ verglichen werden. Exemplarisch soll an dieser Stelle die Länge des Vektors $\overrightarrow{A_tB_t}$ berechnet werden. Es gilt :

$$\overrightarrow{A_tB_t} = \vec{b_t} - \vec{a_t}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

und damit für die Länge des Vektors

$$\left| \overrightarrow{A_tB_t} \right| = \sqrt{(-1+t)^2 + 1^2 + (-t^2)}$$

$$= \sqrt{1 - 2t + t^2 + 1 + t^2}$$

$$= \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

Die Länge der Vektoren $\overrightarrow{A_tC_t}$ und $\overrightarrow{B_tC_t}$ berechnet man analog.. Es gilt

$$\left|\overrightarrow{A_tC_t}\right| = \sqrt{2t^2-2t+2} \quad \text{und}$$

$$\left|\overrightarrow{B_tC_t}\right| = \sqrt{2t^2-2t+2}$$

Damit ist die Gleichseitigkeit bewiesen.

## Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (11 BE)

Gesucht ist die Gleichung einer Ebene $E_t$ in Parameterform, die durch die Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ festgelegt wird. Mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{a_t}$, $\overrightarrow{b_t}$ und $\overrightarrow{c_t}$ der Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ gilt für $E_t$:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a_t} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{b_t} - \overrightarrow{a_t}\right) + \mu\cdot\left(\overrightarrow{c_t} - \overrightarrow{a_t}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} + \lambda\cdot\left(\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\right) + \mu\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}t-1\\1\\-t\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\1-t\end{pmatrix}$$

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ dieser Ebene muss gelten :

$$\begin{pmatrix}t-1\\1\\-t\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-1\\t\\1-t\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{n} = 0$$

Dies führt auf ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Komponenten des Vektors $\overrightarrow{n}$ . Schneller geht es über die Berechnung des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren oder über ein vereinfachtes Rechenschema (siehe Info) oder über die Formel (siehe Formelsammlung)

Beachte :

Der Normalenvektor einer Ebene mit den Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ kann}$$

schnell durch folgendes Schema berechnet werden :

$$\begin{pmatrix}-3 & -1\\1 & -1\\1 & 1\\-3 & -1\\1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot(-1)\\1\cdot(-1)-(-3)\cdot1\\(-3)\cdot(-1)-1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

Dabei schreibt man die beiden Richtungsvektoren der Ebene zweimal untereinander, streicht die erste und letzte Zeile und berechnet für jede Komponente des Normalenvektors die Determinante einer 2x2-Matrix.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(1-t)-(-t)\cdot t \\ -t\cdot(-1)-(t-1)\cdot(1-t) \\ (t-1)\cdot t-1\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-t+t^2 \\ t-\left(t-1-t^2+t\right) \\ t^2-t+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor kann noch vereinfacht werden. Es gilt :

$$\begin{pmatrix} t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \end{pmatrix} = \left(t^2-t+1\right)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Normalenvektoren der Ebenenschar $E_t$ sind kollinear zum Vektor

$$\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das heißt aber auch : Alle Ebenen $E_t$ haben den gleichen Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und sind somit parallel zueinander.

Im letzten Teil der Aufgabe soll für beliebige reelle Zahlen t und k der Abstand zweier Ebenen $E_t$ und $E_{t+k}$ dieser Schar bestimmt werden.

Da die Ebenen parallel sind, genügt es, den Abstand eines Punktes der Ebene $E_{t+k}$ von der Ebene $E_t$ zu berechnen.

Mit Sicherheit liegt der Punkt $A_{t+k}\left(1\,|\,0\,|\,t+k\right)$, in der Ebene $E_{t+k}$,

die Ebenengleichung für $E_t$ lautet

$$1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z = d$$

Setzt man den Punkt $A_t$ in die Ebenengleichung ein, erhält man für d

$$d = 1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot t = 1+t$$

somit ergibt sich für $E_t$ in Koordinatenform

$$E_t:\ 1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z = 1+t$$

Mit der Abstandsformel (siehe Kästchen) ergibt sich für den Abstand a des Punktes

At+k von der Ebene Et

$$a = \frac{\left|1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(t+k)-(1+t)\right|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{\left|1+t+k-1-t\right|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{|k|}{\sqrt{3}} = \frac{|k|\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Beachte :

Zur Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene gibt es verschiedene Verfahren. In unserem Fall ist der Lotfußpunkt nicht gesucht. Es bietet sich daher an, die Hessesche Normalenform in Koordinatenschreibweise zu verwenden:

Für den Abstand a eines Punktes P$\left(p_1\,|\,p_2\,|\,p_3\right)$ von der

Ebene E : $n_1x+n_2y+n_3z=d$

gilt

$$a = \frac{\left|n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2+n_3\cdot p_3-d\right|}{\sqrt{n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}}}$$

## Lösung zu Teilaufgabe 1.4 ( 4 BE )

In diesem Teil sollen die in Material 2 durchgeführten Rechenschritte erläutert und im Sachzusammenhang interpretiert werden. Die folgenden Gegenüberstellung enthält links die Vorgaben und rechts die zugehörigen Erläuterungen.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$ | Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ werden berechnet.<br>Es gilt : $\overrightarrow{AB} = \vec{b}_t - \vec{a}_t$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{c}_t - \vec{a}_t$ |
| (2) | $A(t) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} \right\|$ | Mit Hilfe des Kreuzprodukts kann die Fläche des Dreiecks ( bzw. des halben Parallelogramms) in Abhängigkeit von t berechnet werden, das von den beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird |
| (3) | $A(t) = \frac{\sqrt{3} \cdot (t^2 - t + 1)}{2}$ | Der Betrag des Kreuzprodukts<br>$\left\| \begin{pmatrix} t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \\ t^2-t+1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(t^2-t+1)^2 + (t^2-t+1)^2 + (t^2-t+1)^2}$<br>$= (t^2-t+1) \cdot \sqrt{3}$<br>wurde ausgerechnet und eingesetzt |
| (4) | $A'(t) = \frac{\sqrt{3} \cdot (2t-1)}{2}$ ; $A''(t) = \sqrt{3}$ | Die ersten beiden Ableitungen der Funktion A(t) werden berechnet und |
| (5) | $\frac{\sqrt{3} \cdot (2t-1)}{2} = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{2}$ | Hier wird die erste Ableitung von A(t) gleich Null gesetzt. Bei t = 0,5 findet sich ein relatives Extremum |
| (6) | $A''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} > 0 \;\rightarrow\; Minimum$ | Die zweite Ableitung ist positiv. Bei dem Extremum handelt es sich um ein Minimum.<br><br>Die 6 Schritte beschreiben die Suche nach einer reellen Zahl t, für den der Flächeninhalt der Dreiecke aus Aufgabe 1.1 einen Extremwert, in diesem Fall einen minimalen Wert annimmt. |

## Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

In dieser Aufgabe geht es um das Volumen einer Pyramidenschar, die von den Punkten $A_t$ , $B_t$ , $C_t$ sowie dem Ursprung in Abhängigkeit von t gebildet werden. Gegeben war eine Formel zur Berechnung des Volumens einer solchen Pyramide. Mit den Ortsvektoren $\vec{a}_t$ , $\vec{b}_t$ und $\vec{c}_t$ gilt :

$$V(t) = \frac{1}{6} \cdot \left| \left( \vec{a}_t \times \vec{b}_t \right) \cdot \vec{c}_t \right|$$

Setzt man die Komponentendarstellung der Vektoren in diese Formel ein, so folgt :

$$V(t) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}\right|$$

und nach Berechnung des Kreuzprodukts

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-t\\t^2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}\right|$$

und des Skalarprodukts

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3+1\right)\right|$$

Für welche reelle Zahl t nimmt dieses Volumen den Wert $\frac{3}{2}$ an ?

$$\frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3+1\right)\right| = \frac{3}{2}$$

An dieser Stelle muss auf die Betragsstriche geachtet werden.

1. Fall : $t^3+1>0$

$$\frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3+1\right)\right| = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\left(t^3+1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\left(t^3+1\right) = 9$$

$$t^3 = 8$$

$$t_1 = 2$$

2. Fall : $t^3 + 1 < 0$

$$\frac{1}{6} \cdot \left| \left(t^3 + 1\right) \right| = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \left[-\left(t^3 + 1\right)\right] = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \left(t^3 + 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\left(t^3 + 1\right) = -9$$

$$t^3 = -10$$

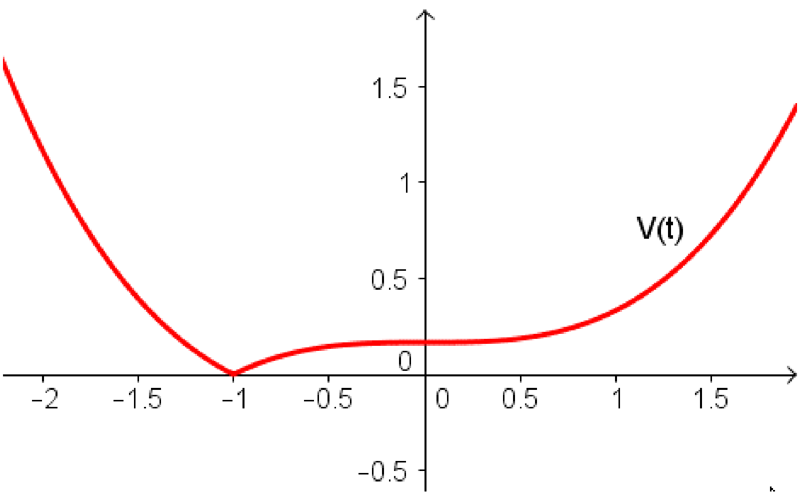
$$t_2 = \sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$$

$$t_2 \approx -2{,}154$$

Es gibt also zwei Lösungen für diese Gleichung.

**Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (4 BE)**

Im letzten Aufgabenteil ist zu untersuchen, ob die Pyramide mit der kleinsten Grundfläche ( das ist nach Aufgabe 1.4 der Fall für t = 0,5 ) auch die Pyramide mit dem kleinsten Volumen ist.



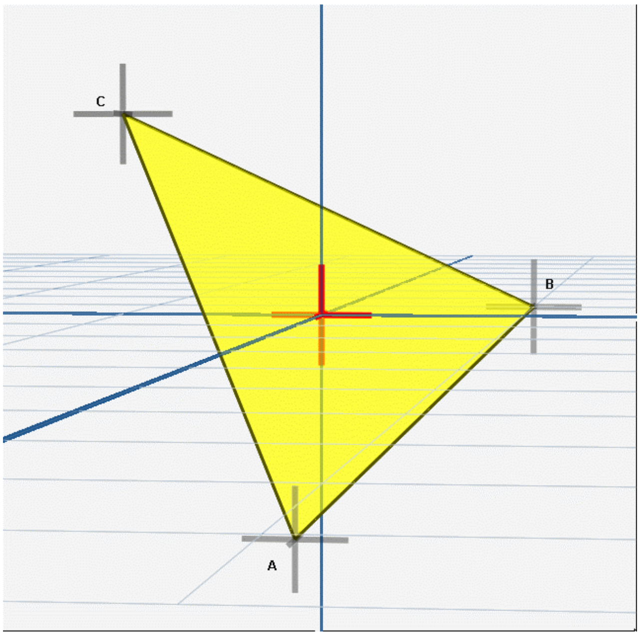
Aus der graphischen Darstellung für V(t) = $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3+1\right)\right| = \frac{3}{2}$

ist leicht zu erkennen, dass das Volumen der Pyramide gegen Null geht, wenn t von links oder von rechts gegen -1 geht. Für t = 0,5 kann das Volumen also keinen kleinsten Wert annehmen.

Begründungen ohne Verwendung des Funktionsgraphen :

1. Für t = -1 liegt das Dreieck $\Delta_{-1}$ mit den Eckpunkten $A_{-1}$, $B_{-1}$ und $C_{-1}$ in der Ebene $E_{-1}$. Diese Ebene enthält den Ursprung.

   Die entsprechende Pyramide hat also den Rauminhalt 0 VE. (siehe Skizze )




2. Angabe einer Pyramide mit einem kleineren Volumen :

   Für t = 0,5 ergibt sich das Volumen der Pyramide zu

   V(0,5) = $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(0{,}5^3+1\right)\right| = 0{,}1875\,VE$

   Findet man jetzt eine Pyramide aus der Schar mit einem kleineren Volumen, so ist die Behauptung aus der Aufgabe widerlegt. Wählt man t = -0,5 , folgt

   V(-0,5) = $\frac{1}{6}\cdot\left|\left((-0{,}5)^3+1\right)\right| = 0{,}1458\overline{3}\,VE$ und damit der Widerspruch zur Behauptung.